MA2115 Clase 16: Sistemas de ecuaciones diferenciales no-homogéneos. Método de variación de parámetros

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Solución general de un sistema no homogéneo

Teorema 1 *Consideremos el sistema SEDL no homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{G}$, donde $A(t)$ es continua, y sea $\vec{X}_p$ una solución particular cualquiera. Entonces $\vec{X}_h$ es una solución del SEDL homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$ si, y sólo si, $\vec{Y} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$ es una solución del SEDL no homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{G}$.*

Demostración: Supongamos primero que $\vec{X}_h$ es una solución del sistema homogéneo, es decir, $\vec{X}_h' = A(t)\vec{X}_h$. Como $\vec{X}_p$ es una solución del sistema no homogéneo tenemos que $\vec{X}_p' = A(t)\vec{X}_p + \vec{G}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \vec{X}_h' &= A(t)\vec{X}_h \\ \vec{X}_p' &= A(t)\vec{X}_p + \vec{G} \end{aligned}$$

y sumando las ecuaciones obtenemos que

$$\vec{X}_h' + \vec{X}_p' = A(t)\vec{X}_h + A(t)\vec{X}_p + \vec{G}$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{Y}' &= \left(\vec{X}_h + \vec{X}_p\right)' = \vec{X}_h' + \vec{X}_p' \\ &= A(t)\vec{X}_h + A(t)\vec{X}_p + \vec{G} = A(t)\left(\vec{X}_h + \vec{X}_p\right) + \vec{G} = A(t)\vec{Y} + \vec{G}. \end{aligned}$$

Es decir, $\vec{Y}' = A(t)\vec{Y} + \vec{G}$ y así $\vec{Y}$ es solución del sistema no homogéneo.

Recíprocamente, si $\vec{Y}$ es solución del sistema no homogéneo entonces, como $\vec{X}_h = \vec{Y} - \vec{X}_p$, tenemos que

$$\vec{X}_h' = \left(\vec{Y} - \vec{X}_p\right)' = \vec{Y}' - \vec{X}_p' = A(t)\vec{Y} + \vec{G} - A(t)\vec{X}_p - \vec{G} = A(t)\left(\vec{Y} - \vec{X}_p\right) = A(t)\vec{X}_h,$$

esto es, $\vec{X}_h$ es solución del sistema homogéneo. □

En la clase pasada, vimos algunos métodos para encontrar de forma eficiente un conjunto linealmente independiente de soluciones que generen todas las soluciones de un SEDL homogéneo donde la la función matricial $A(t)$ es constante (es decir, no depende de t).

Teorema 2 *Sea* $\left\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right\}$ *un conjunto de soluciones linealmente independientes del SEDL homogéneo* $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$*, donde* $A(t)$ *es continua y* $n \times n$*, y sea* X_p *una solución particular cualquiera del SEDL no homogéneo* $\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{G}$*. Entonces la solución general del SEDL no homogéneo* $\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{G}$ *está dada por*

$$\vec{X}_g = \vec{X}_h + \vec{X}_p = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \cdots + c_n\vec{X}_n + \vec{X}_p,$$

donde $\vec{X}_h$ *denota la solución general del sistema homogéneo* $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$*.*

Demostración: Sea V_A el espacio de soluciones del sistema homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$. De acuerdo a nuestras hipótesis, sabemos que existen al menos n vectores linealmente independientes en V_A, a saber, los vectores dados por las soluciones $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$. Sea $\vec{X}_h$ una solución cualquiera de $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$. Para cada $t_0 \in I$, los vectores $\vec{X}_1(t_0), \vec{X}_2(t_0), \ldots, \vec{X}_n(t_0)$ forman una base base de $\mathbb{R}^n$ (ver Clase 14, Teorema 2) y, en consecuencia, $\vec{X}_h(t_0)$ puede ser expresado como combinación lineal de dichos vectores, es decir, existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{X}_h(t_0) = c_1\vec{X}_1(t_0) + c_2\vec{X}_2(t_0) + \cdots + c_n\vec{X}_n(t_0),$$

y ahora, haciendo $\vec{B}_0 = \vec{X}_h(t_0)$, vemos que el Problema de valores iniciales

$$X' = A\vec{X}; \qquad \vec{X}(t_0) = \vec{B}$$

tiene dos soluciones, a saber, $\vec{X}_h$ y $c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \cdots + c_n\vec{X}_n$, de donde, en virtud de la unicidad de soluciones de problemas a valores iniciales (porque A es continua), tenemos que dichas soluciones tienen que coincidir, esto es,

$$\vec{X}_h = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \cdots + c_n\vec{X}_n.$$

Ahora bien, de acuerdo al teorema anterior, la solución general del sistema es en efecto $\vec{X}_g = \vec{X}_h + \vec{X}_p = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \cdots + c_n\vec{X}_n + \vec{X}_p$. $\square$

Ejemplo 1 *Verifique que* $\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ *es una solución particular del sistema*

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Luego encuentre la solución general del sistema.

Solución: Por una parte, la derivada de $\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix}$ está dada por $\vec{X}_p' = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ y, por otra parte, haciendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{G} = \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$A\vec{X}_p + \vec{G} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12t+14 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12t-11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

de donde claramente obtenemos que $\vec{X}_p' = A\vec{X}_p + \vec{G}$. Usando la técnica de autovalores discutida en la clase anterior, hallamos que los vectores $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}$, con lo cual la solución general del sistema no homogéneo está dada por

$$\vec{X}_g = \vec{X}_h + \vec{X}_p = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \vec{X}_p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} + \begin{pmatrix} 3t-4 \\ -5t+6 \end{pmatrix},$$

es decir, $\vec{X}_g = \begin{pmatrix} c_1e^{-2t} + 3c_2e^{6t} + 3t - 4 \\ -c_1e^{-2t} + 5c_2e^{6t} - 5t + 6 \end{pmatrix}$. □

2 Método de variación de parámetros

El método de variación de parámetros es un análogo multi-dimensional del método del factor integrante que utilizamos para resolver la ecuación lineal de primer orden. En este caso, el factor integrante es substituido por una función matricial llamada matriz fundamental. Este método nos permite encontrar una solución particular de un sistema no homogéneo, dado que hemos encontrado ya un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado. Antes de discutir el método necesitamos establecer algunos resultados necesarios.

Definición 1 *Sea $\left\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right\}$ un conjunto de soluciones linealmente independientes del SEDL homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$, donde $A(t)$ es una función continua sobre un intervalo abierto I a valores matrices $n \times n$. Definimos una matriz fundamental del sistema $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$, denotada Ψ, como una función matricial cuyas columnas son las soluciones $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n$, es decir,*

$$\Psi := \left(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \ldots | \vec{X}_n\right).$$

Lema 1 *Sea $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$ un SEDL homogéneo, donde $A(t)$ es una función continua sobre un intervalo abierto I a valores matrices $n \times n$, y sea Ψ una matriz fundamental. Entonces, para toda solución $\vec{X}$ del sistema $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$ existe un vector constante $\vec{C} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{X} = \Psi\vec{C}$.*

Demostración: Sabemos que existe un conjunto fundamental de soluciones $\left\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\right\}$ tal que $\Psi := \left(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \ldots | \vec{X}_n\right)$, y sabemos que cada solución $\vec{X}$ puede ser expresada como combinación lineal de dichos vectores, esto es, existen $c_1, c_2, \ldots, c_n\mathbb{R}$ tales que $\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 + \cdots + c_n\vec{X}_n$, de donde

$$\vec{X} = \left(\vec{X}_1 | \vec{X}_2 | \cdots | \vec{X}_n\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

con lo cual haciendo $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, obtenemos el enunciado. $\square$

Ejemplo 2 *Encuentre una matriz fundamental del sistema homogéneo*

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}.$$

Solución: Usando el método de los autovalores podemos encontrar las soluciones $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ y $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{pmatrix}$, las cuales forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo y, en consecuencia,

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental del sistema. $\square$

Definición 2 *Dada una función vectorial* $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, *denotaremos por*

$$\int \vec{F}(t)dt = \begin{pmatrix} \int f_1(t)dt \\ \int f_2(t)dt \\ \vdots \\ \int f_n(t)dt \end{pmatrix}.$$

Hemos visto que podemos expresar la solución general del sistema homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X}$ como $\vec{X} = \Psi\vec{C}$, y cada vector $\vec{C} \in \mathbb{R}$ induce una solución de dicho sistema. Por lo tanto, $\left(\Psi\vec{C}\right)' = A\left(\Psi\vec{C}\right)$, esto es, $\Psi'\vec{C} = A\Psi\vec{C}$, para cada $\vec{C} \in \mathbb{R}$, de donde $\Psi' = A\Psi$.

Supongamos que la matriz columna $\vec{C}$, que en principio es constante, depende suavemente de t de tal forma que $\vec{X}_p(t) = \Psi(t)\vec{C}(t)$ sea una solución particular del sistema no homogéneo $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, es decir,

$$\vec{C}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{C}'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} \quad \text{existe}$$

y $\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right)' = A(t)\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right) + \vec{G}(t)$. Entonces, como $\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right)' = \Psi'(t)\vec{C}(t) + \Psi(t)\vec{C}'(t)$, substituyendo en $\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right)' = A(t)\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right) + \vec{G}(t)$ obtenemos que

$$\Psi'(t)\vec{C}(t) + \Psi(t)\vec{C}'(t) = A(t)\left(\Psi(t)\vec{C}(t)\right) + \vec{G}(t).$$

Usando ahora que $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$, tenemos que

$$A(t)\Psi(t)\vec{C}(t) + \Psi(t)\vec{C}'(t) = A(t)\Psi(t)\vec{C}(t) + \vec{G}(t),$$

de donde

$$\Psi(t)\vec{C}'(t) = \vec{G}(t).$$

Ahora observemos que las columnas de la matriz $\Psi(t)$ son vectores linealmente independientes, con lo cual, la matriz $\Psi(t)$ es invertible y podemos despejar la ecuación anterior para obtener

$$\vec{C}'(t) = (\Psi(t))^{-1}\,\vec{G}(t) \quad \text{ y, por lo tanto, } \quad \vec{C}(t) = \int (\Psi(t))^{-1}\,\vec{G}(t)dt.$$

Observemos ahora que la función obtenida siempre satisface las suposiciones hechas sobre C. Es decir, que $C(t)$ depende suavemente de t y $\vec{X} = \Psi\vec{C}$ es solución de la ecuación. Finalmente, substituyendo esta última expresión en la ecuación $\vec{X} = \Psi\vec{C}$, obtenemos

$$\vec{X}(t) = \Psi(t)\int (\Psi(t))^{-1}\,\vec{G}(t)dt.$$

Hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 3 (Variación de Parámetros) *Sea $\vec{X}' = A(t)\vec{X}$ un SEDL homogéneo, donde $A(t)$ es una función continua sobre un intervalo abierto I a valores matrices $n \times n$, y sea Ψ una matriz fundamental. Entonces, la solución general del SEDL no homogéneo $\vec{X}' = A(t)\vec{X} + \vec{G}$ está dada por*

$$\vec{X}(t) = \Psi(t)\int (\Psi(t))^{-1}\,\vec{G}(t)dt.$$

Observación 1 *Cada coordenada en la integral vectorial produce una constante de integración independiente de las demás. Por lo tanto, si $F(t)$ denota una anti-derivada particular de $(\Psi(t))^{-1}\,\vec{G}(t)$, la fórmula viene a ser*

$$\vec{X}(t) = \Psi(t)\left(\vec{F}(t) + \vec{C}(t)\right) = \Psi(t)\vec{F}(t) + \Psi(t)\vec{C} = \vec{X}_p + \vec{X}_h,$$

donde $\vec{X}_p(t) = \Psi(t)\vec{F}(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo y $\vec{X}_h = \Psi(t)\vec{C}$ es la solución general del sistema homogéneo.

Ejemplo 3 *Resuelva el sistema*

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solución: De acuerdo al ejemplo 2,

$$\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental del sistema dado. Por lo tanto, queremos calcular

$$\vec{X}(t) = \Psi(t) \int (\Psi(t))^{-1} \vec{G}(t)dt,$$

donde $\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$ y $\vec{G}(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}$. Recordemos primero que la matriz inversa de una matriz 2×2 es fácil de calcular mediante la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Usando esta fórmula, obtenemos que $(\Psi(t))^{-1} = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t) &= \Psi(t) \int (\Psi(t))^{-1} \vec{G}(t)dt \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & 3e^{-3t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 12e^{-3t} \\ e^{t} - 4e^{-4t} \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int(-2e^{2t} + 12e^{-3t})dt \\ \int(e^{t} - 4e^{-4t})dt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} + c_1 \\ e^{t} + e^{-4t} + c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} \\ e^{t} + e^{-4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{3t}(-e^{2t} - 4e^{-3t}) + 3e^{4t}(e^{t} + e^{-4t}) \\ e^{3t}(-e^{2t} - 4e^{-3t}) + 2e^{4t}(e^{t} + e^{-4t}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -e^{5t} + 4 + 3e^{5t} + 3 \\ -e^{5t} + 4 + 2e^{5t} + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 7 \\ e^{5t} + 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 7 + c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ e^{5t} + 6 + c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es decir, la solución general del sistema

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}$$

está dada por $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 7 + c_1e^{3t} + 3c_2e^{4t} \\ e^{5t} + 6 + c_1e^{3t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix}$. □

Ejemplo 4 *Encuentre la solución del problema de valores iniciales*

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Hemos visto en el ejemplo anterior que la solución general del sistema está dada por

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 7 + c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{4t} \\ e^{5t} + 6 + c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Evaluando en $t = 0$ esta ecuación y substituyendo en las condiciones iniciales, obtenemos que

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 + 7 + c_1 + 3c_2 \\ 1 + 6 + c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix},$$

de donde llegamos al sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + 3c_2 + 9 & = & 9 \\ c_1 + 2c_2 + 7 & = & 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} c_1 + 3c_2 & = & 0 \\ c_1 + 2c_2 & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} c_1 + 3c_2 & = & 0 \\ -c_2 & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} c_1 & = & -9 \\ c_2 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Por lo tanto, la solución buscada está dada por $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 3e^{4t} - 9e^{3t} + 7 \\ e^{5t} + 6e^{4t} - 9e^{3t} + 6 \end{pmatrix}$. □

Ejemplo 5 *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -y + \sec(t) \\ y' & = & x. \end{array} \right.$$

Solución: En forma matricial el sistema tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, es de la forma $\vec{X}' = A\vec{X} + \vec{G}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{G}(t) = \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Solución del sistema homogéneo asociado</u>: Calculamos primero el polinomio característico

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i),$$

con lo cual tenemos que i y $-i$ son los autovalores de A. Como las raíces son complejas (no reales) conjugadas, basta con trabajar con una sola de las raíces. Para calcular V_i, el autoespacio asociado a i, primero reducimos la matriz $A - iI$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_i$ si, y sólo si, $u - iv = 0$, de donde

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

Es decir, $V_i = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Por lo tanto, tenemos las soluciones complejas

$$\vec{Z}_1(t) = e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{Z}_2(t) = \overline{\vec{Z}_1(t)} = e^{-it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, para obtener soluciones reales consideramos las combinaciones lineales

$$\vec{X}_1(t) = \text{Re}\left(\vec{Z}_1(t)\right) = \frac{1}{2}(\vec{Z}_1(t) + \vec{Z}_2(t)) \quad \text{y} \quad \vec{X}_2(t) = \text{Im}\left(\vec{Z}_1(t)\right) = \frac{1}{2i}(\vec{Z}_1(t) - \vec{Z}_2(t))$$

Como

$$e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos t + i\,\text{sen}\, t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t + i\cos t \\ \cos t + i\,\text{sen}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

tenemos que

$$\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

es un conjunto fundamental de soluciones de $\vec{X}' = A\vec{X}$ y la solución general del sistema homogéneo está dada por

$$X_h = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

<u>Solución particular del sistema no-homogéneo</u>: Calculamos primero la matriz fundamental Ψ y su inversa:

$$\Psi = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t & \cos t \\ \cos t & \text{sen}\, t \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \Psi^{-1} = \frac{1}{\det\Psi}\text{adj}\Psi = (-1)\begin{pmatrix} \text{sen}\, t & -\cos t \\ -\cos t & -\text{sen}\, t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t & \cos t \\ \cos t & \text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando la fórmula $\vec{X}_p = \Psi\int\Psi^{-1}\vec{G}(t)dt$, donde la integral se interpreta como integración coordenada a coordenada, tenemos que

$$\Psi^{-1}\vec{G}(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t & \cos t \\ \cos t & \text{sen}\, t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int\Psi^{-1}\vec{G}(t)dt = \begin{pmatrix} -\int\tan x dt \\ \int dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln|\cos t| \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{X}_p = \Psi\int\Psi^{-1}\vec{G}(t)dt = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t & \cos t \\ \cos t & \text{sen}\, t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln|\cos t| \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(t)\ln|\cos t| + \cos t \\ \cos(t)\ln|\cos t| + t\,\text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del sistema no-homogéneo está dada por

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p = c_1\begin{pmatrix} -\text{sen}\, t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \text{sen}\, t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\text{sen}(t)\ln|\cos t| + \cos t \\ \cos(t)\ln|\cos t| + t\,\text{sen}\, t \end{pmatrix}.$$

Correcciones: Boris Iskra

May 13, 2008